Lycée Pilote de TUNIS 4Math 4 - 6 - 7 Chokri-Ltaif-B.ghezala	DEVOIR DE SYNTHESEN°2	MArs2010 Durée : 4 heures

EXERCICEN°1(5pts)

A) Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1) Pour tout entier naturel n , 3 divise le nombre 2^{2n}-1.(0.5pt)
2) Si un entier x est solution de l'équation $x^2+x\equiv 0$ (mod6) alors $x\equiv 0$(mod3).(0.5pt)
3) Il existe un seul couple (a, b) des entiers naturels, tel que a < b et a $\vee$ b- a$\wedge$ b=1.(0.5pt)
4) Deux entiers naturels M et N sont tels que M =abc en base dix et N=bca en base dix . si M est divisible par 27 alors M-N est divisible par 27.(1pt)

B) Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse des trois réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) f définie sur]-∞,1[par : f(x) =$\frac{(1-ln(1-x))^3}{x-1}$ Une primitive de f est :

a) F(x) = $\frac{1}{4}$(1-ln(1-x))^4 b) F(x) = -$\frac{1}{4}$(1-ln(1-x))^4 c) F(x) =$\frac{1}{2}$(1-ln(1-x))^2 .(0.5pt)

2)f(x)= $e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}$ est une bijection de IR sur IR .l'application réciproque de f est :

a) f^{-1}(x)= 2ln(x+$\sqrt{x^2+4}$) b)f^{-1}(x)= $\frac{1}{2}$ln(x+$\sqrt{x^2+4}$) c) f^{-1}(x)= 2ln($\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$) . (1pt)

3) Une asymptote de la fonction f définie par f(x) =ln($e^{2x} - e^x + 1$) est :

a) Δ :y=-2x b) Δ : y=2x+e^{-2} c) Δ :y=2x (0.5pt)

EXERCICEN°2(5pts)

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet , on commence par associer un entier n de l'ensemble Ω = {0; 1; 2; ; ..... .; 24; 25}selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de (an+b) par 26 , ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : Pour coder la lettre P avec a=2et b=3,on procède de la manière suivante :

Etape1 : on lui associé l'entier n=15

Etape2 : le reste de la division de 2x15+3=33 par 26est 7.

Etape3 : on associe7à H. donc P est codé par la lettre H.

1) Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend a=0.
2) Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque a=13.
3) Dans toute la suite de l'exercice on prend a=5 et b=2.
   a) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p .Montrer que si 5n+2 et 5p+2 ont le même reste dans la division par 26alors n-p est un multiple de 26.Déduire une relation entre n et p.
   b) Coder le mot AMI.
4) On se propose de décoder la lettre E .
   Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que 5n-26y=2 où y est un entier.
5) On considère l'équation 5x-26y=2, avec x et y entiers .
   a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués une solution particulière. et résoudre l'équation.
   b) En déduire qu'il existe un unique couple(x,y) solution de l'équation précédente , avec $0 \leq x \leq 25$.
   c) Décoder alors la lettre E.

EXERCICE N°3(5 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$

1) Etudier et représenter C_f dans le repère orthogonal (O, $\vec{i}, \vec{j}$) (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées)
2) On pose, pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,dx$.
   a) Calculer I_1.
   b) Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $p \geq 1$:
      $$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)\, I_p$$
   c) En utilisant les résultats précédents, calculer I_4.
   d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de C_f, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de C d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon f(x). Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.
3) Soit a un réel strictement positif et A le point de C d'abscisse a.
   Soit T_a la tangente à C_f au point A.
   a) Ecrire une équation de T_a.
   b) Déterminer les réels a, pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
   c) Donner une équation de chacune des tangentes à C_f passant par O. Tracer ces tangentes sur la figure.

EXERCICE N°4(5pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A direct.

On désigne par A_1, B_1, C_1 , L et H les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] , [A_1 C] et [AA_1].

1) Faire une figure.
2) Soit f la similitude directe de centre A_1, qui envoie A sur B_1.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b) Justifier que f(B_1)= L et déterminer f(C_1).
3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associé le point M' d'affixe z' tel que $z'=(\frac{-1-i}{2})\,\bar{z}+\frac{1+i}{2}$.
   a) Déterminer la nature et le le centre de g .
   b) Donner les affixes des points A_1, B_1, C_1 , L et H.
   c) Déterminer g(C_1) et g(A_1).
   d) Déduire alors que $g=f\circ S_{(B_1C_1)}$.
4) a) tracer l'axe Δ de g et déterminer une équation.
   c) La droite Δ coupe les droites (B_1C_1) et (HL) respectivement en P et Q .
   Montrer que g(P) =f(P) et déduire g(P).